MA+PHY2

Mathematik-Formelsammlung

Flavio De Roni
Studiengang Wirtschaftsingenieur | Innovation 4. Semester

HSLU-T&A
09.05.2012

Änderungsverzeichnis

Version	Datum	Autor	Änderung	Status
0.1	24.02.12	FDR	Funktionen mit mehreren Variablen	fertig
0.2	03.02.12	FDR	Partielle Ableitungen	fertig
0.3	07.03.12	FDR	Tangentialebene, Linearisierung, Differentiale	fertig
0.4	17.03.12	FDR	Fehlerrechnung	fertig
0.5	23.03.12	FDR	Parameterdarstellung	fertig
0.6	29.03.12	FDR	Gradient	fertig
06.1.1	20.04.12	FDR	Das Wichtigste zum Gradienten	fertig
0.7	27.04.12	FDR	Extremstellen	fertig
0.8	04.05.12	FDR	Vektoranalysis	fertig
1.0	09.05.12	FDR	Mehrfachintegrale	fertig

Inhalt

1 Funktionen mit mehreren Variablen

Eine Funktion mit den unabhängigen Variablen x und y ordnet jedem geordneten Zahlenpaar (x, y) aus einer Definitionsmenge D genau eine Zahl zu.
Man schreibt für die Funktion (Abbildung):

$f: \ (x, y) \ \rightarrow \ z = f(x, y) \quad \text{mit} \ (x, y) \in D \ \text{und} \ z \in W$

Oft schreibt man nur die Funktionsgleichung in der Form $z = f(x, y)$.

Man nennt x, y:	unabhängige Variablen,	z:	abhängige Variable
$D \subset IR^2$:	Definitionsbereich,	$W \subset IR$:	Wertebereich

Für die Menge aller Zahlenpaare (x, y) schreibt man $IR \times IR = IR^2$ (kartesisches Produkt)

1.1 Flächen skizzieren

Ebenen können in der Form
$Ax + By + Cz + D = 0$ resp. $z = ax + by + c$
beschrieben werden.

<u>Lösung:</u>
Suche drei Punkte, möglichst auf den Koordinatenachsen
(sonst drei beliebige Punkte)

<u>Geg.</u>: $z = f(x,y) = -2x - 3y + 6$

- Punkt auf x-Achse → (x/0/0)
- Punkt auf y-Achse → (0/y/0)
- Punkt auf z-Achse → (0/0/z)

- Punkte bestimmen, indem die Werte in z = f(x,y) eingesetzt werden

- Die drei Punkte verbinden → Ebene

Anmerkung:
Liegt kein Punkt der Ebene auf der y-Achse, so ist die gesuchte Ebene parallel zu dieser Achse.

1.2 Höhenlinie bestimmen

<u>Geg.:</u> $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $z_0 = 0$

- $f(x,y) = z_0$, danach auflösen und skizzieren

1.3 Definitionsbereich bestimmen

Regeln für die Bestimmung von Definitionsbereichen.		
Wurzelargumente dürfen nicht negativ sein.	$\sqrt{x}$	ist definiert, falls $x \geq 0$
Logarithmusargumente müssen positiv sein.	$\ln(x)$	ist definiert, falls $x > 0$
Die Division durch 0 ist nicht definiert.	$\frac{1}{x}$	ist definiert für $x \neq 0$

Geg.: $z = f(x,y) = \ln(y-3x)$
Ges.: $D = \{(x,y) \mid F(x,y)\}$

Lösung

- In muss positiv sein, d.h. Term > 0 → $D = \{(x,y) \mid y-3x>0\}$
- Ersetze die Ungleichung durch eine Gleichung (Höhenlinie zeichnen)
  $y-3x = 0$
  $y=3x$
- Grafisch bestimmen (mit TI zeichnen)
- In jedem sich ergebenden Gebiet mit einem Punkt prüfen, ob die Gleichung $F(x,y)$ erfüllt wird.
  JA: Gehört zu D
  NEIN: Gehört nicht zu D

1.4 Schnittkurven mit konstanten x- oder y-Werten

Die Schnittkurve $y = y_0$ (konstant) von $z = f(x,y)$ lautet:
$z = f(x,y_0)$

Die Schnittkurve $x = x_0$ (konstant) von $z = f(x,y)$ lautet:
$z = f(x_0,y)$

Beispiel:
Wie lauten die Schnittkurven von $z = f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

1. mit der Ebene $x=2$
2. mit der Ebene $y=3$

1) $z = \ln(2^2+y^2)$

2) $z = \ln(x^2+3^2)$

1.5 Rotationssymmetrische Funktionen

Satz: Rotiert die Kurve $z = g(x)$ für $x \geq 0$ auf der xz-Ebene um die z-Achse, so entsteht eine Rotationsfläche. Die Gleichung dieser Rotationsfläche lautet

$$z = f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

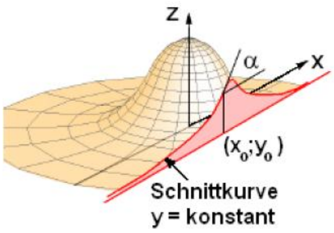
Hinweis: Mit Zylinderkoordinaten lautet die Gleichung $z = g(r)$

2 Die partielle Ableitung

Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen heissen partielle Ableitungen.

2.1 Die partielle Ableitung in x-Richtung

Man leitet Richtung x-Achse ab. y ist konstant.

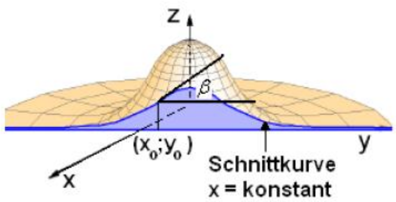


Die formale Definition der partiellen Ableitung nach x im Punkt (x_o, y_o) lautet:

$$f_{,x}(x_o; y_o) = \tan(\alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x}$$

2.2 Die partielle Ableitung in y-Richtung

Man leitet Richtung y-Achse ab. x ist konstant.



Die formale Definition der partiellen Ableitung von f(x, y) nach y im Punkt (x_o, y_o) lautet:

$$f_{,y}(x_o; y_o) = \tan(\beta) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)}{\Delta y}$$

2.3 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Partielle Ableitungen können wieder abgeleitet werden.

$$f_{,xy}(x; y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \, \partial y}\right)$$

Zuerst wird nach x und danach nach y abgeleitet.

Man kann auch mehrmals nach derselben Variablen ableiten

$$f_{,xx}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x \, \partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 f(x; y)}{\partial x^2}\right)$$

2.3.1 Satz von Schwarz

Bei gemischten partiellen Ableitungen kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen an, wenn die ursprüngliche Funktion und alle Ableitungen stetig sind.

2.4 Aus den Ableitungen die Urfunktion bestimmen

Geg.: partielle Ableitungen einer Funktion f
Ges.: Funktion f

Lösung

- Wenn es eine solche Funktion geben soll, so müssen die gemischten Ableitungen $f_{,xy}$ (x,y) und $f_{,yx}$ (x,y) übereinstimmen (Satz von Schwarz)
  → gemischte Ableitungen bilden

- Stimmen die gemischten Ableitungen überein, so gibt es eine Funktion. Stimmen sie nicht überein, gibt es keine Lösung.

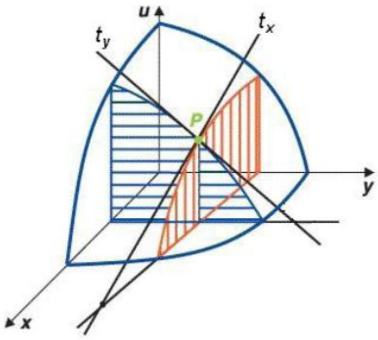
- Integrieren
  $f_{,x}$ (x,y) → f(x,y) + h1(y)
  $f_{,y}$ (x,y) → f(x,y) + h2(x)

  h1 und h2 = Integrationskonstanten

- Koeffizienten vergleichen, um h1 und h2 zu bestimmen

- Lösung aufschreiben: f(x.y) = ... + C

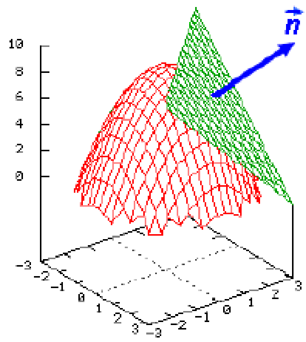
3 Tangentialebene, Linearisierung, Differentiale



3.1 Die Tangentialebene

Die *Tangentialebene* an die Fläche $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $P(x_o; y_o; f(x_o ; y_o))$ wird durch folgende Gleichung beschrieben

$$z = z_o + f_{,x}(x_o ; y_o)\,[x - x_o] + f_{,y}(x_o ; y_o)\,[y - y_o]$$



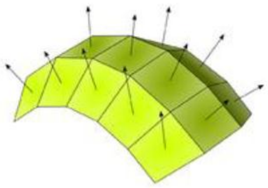
3.1.1 Orthogonale Vektoren auf eine Fläche

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ steht orthogonal zur Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$.

Im Punkt $P(x ; y ; z)$ der Fläche $z = f(x; y)$ steht der Vektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_{,x}(x; y) \\ f_{,y}(x; y) \\ -1 \end{pmatrix}$$

normal (senkrecht) zur Fläche.



3.2 Linearisierung

3.2.1 Linearisierung einer Funktion mit zwei Variablen

Die Linearisierung der Funktion $z = f(x; y)$ im Punkt $(x_o ; y_o)$ lautet

$$z = t(x, y) = f(x_o; y_o) + f_{,x}(x_o; y_o)\,(x - x_o) + f_{,y}(x_o; y_o)\,(y - y_o)$$

Beim Linearisieren wird in der Nähe eines Arbeitspunktes (x_0,y_0) die Funktionsgleichung $z=f(x,y)$ ersetzt durch einen linearen Ausdruck $z = t(x,y) = ax + by + c$

wobei $z = t(x,y) = ax + by + c$ ➔ Gleichung der Tangentialebene in $P(x_0,y_0,*)$

3.2.2 Verallgemeinerung

Verallgemeinerung: Die Linearisierung der Funktion $u = f(x; y; z)$ im Punkt $(x_o; y_o; z_o)$ lautet

$$y = f(x_o; y_o; z_o) + f_{,x}(x_o; y_o; z_o)\,(x - x_o) + f_{,y}(x_o; y_o; z_o)\,(y - y_o) + f_{,z}(x_o; y_o; z_o)\,(z - z_o)$$

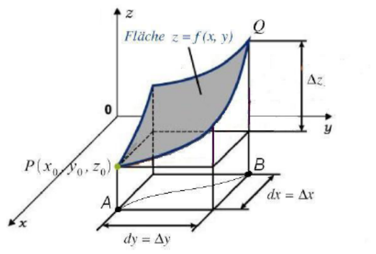
3.3 Das totale Differential

Wie ändert sich der Funktionswert von z = f(x; y), wenn sich die Argumente (x, y) von einem Arbeitspunkt A zu einem Nachbarnpunkt B verschieben?

Verschiebung der Argumente um $(\Delta x; \Delta y)$: $A(x_o; y_o) \longrightarrow B(x_o + \Delta x; y_o + \Delta y)$

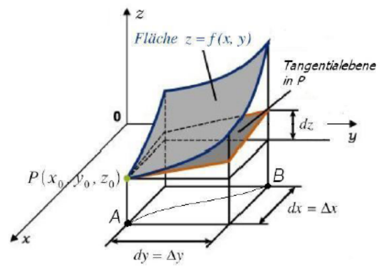
Änderung des Funktionswerts um Δz : $z_o = f(x_o; y_o) \longrightarrow z = f(x_o + \Delta x; y_o + \Delta y)$

Veranschaulichung: Vergleich der Funktionswerte in $A(x_o; y_o)$ und in $B(x_o + \Delta x; y_o + \Delta y)$:



Man nennt die Zuwächse *Differenzen*:

$\Delta x := x - x_o$, $\Delta y := y - y_o$ und $\Delta z := z - z_o$



In der *linearisierten Situation* heissen die Zuwächse *Differentiale*

$dx := x - x_o$, $dy := y - y_o$ und $dz := z - z_o$

Der Zuwachs des Funktionswertes von z = f(x; y) bei der Verschiebungen des Arbeitspunktes von $A(x_o; y_o)$ nach $B(x_o + \Delta x; y_o + \Delta y)$ beträgt

- exakt berechnet $\Delta z = f(x_o + \Delta x; y_o + \Delta y) - f(x_o; y_o)$
- linearisiert berechnet $dz = f_{,x}(x_o; y_o)\, dx + f_{,y}(x_o; y_o)\, dy$ (Herleitung unten)

(exakte Berechnung erfolgt mittels Taschenrechner)

Definition:

Die Differentialform

$$dz = f_{,x}(x; y)\, dx + f_{,y}(x; y)\, dy$$

heisst „totales" oder „vollständiges" Differential von z = f(x, y).

Die Differentialform

$$dw = u_{,x}(x; y; z)\, dx + u_{,y}(x; y; z)\, dy + u_{,z}(x; y; z)\, dz$$

heisst „totales" oder „vollständiges" Differential von w = u(x, y, z).

3.4 Stammfunktion berechnen

Gegeben sei eine Differentialform

$dz = g(x; y)\,dx + h(x; y)\,dy \quad (*)$

Gesucht ist eine Stammfunktion f(x; y) so, dass $(*)$ ein totales Differential von f(x, y) ist:

$df = f_{,x}(x; y)\,dx + f_{,y}(x; y)\,dy = g(x; y)\,dx + h(x; y)\,dy$

Lösungsidee:

Die Bedingungen müssen erfüllt sein:

$f_{,x}(x; y) = g(x; y)$ und $f_{,y}(x; y) = h(x; y)$

Wir bilden die „gemischten" Ableitungen

$f_{,x}(x; y) = g(x; y) \quad \Rightarrow \quad f_{,xy}(x; y) = g_{,y}(x; y)$

$f_{,y}(x; y) = h(x; y) \quad \Rightarrow \quad f_{,yx}(x; y) = h_{,x}(x; y)$

Die gemischten Ableitungen müssen nach Satz von Schwarz übereinstimmen. Es folgt

> Es existiert genau dann eine Stammfunktion z = f(x; y) zur Differentialform
>
> $dz = g(x; y)\,dx + h(x; y)\,dy, \quad (*)$
>
> wenn $(*)$ ein totales Differential ist, d.h. wenn
>
> $g_{,y}(x; y) = h_{,x}(x; y)$ gilt.

4 Fehlerrechnung

In vielen Fällen ist es nicht möglich, Grössen direkt zu bestimmen. Beispielsweise werden Flächeninhalte fast immer nur berechnet, kaum je direkt gemessen. Bei der Bestimmung von Seitenlängen können Messfehler auftreten.
Bei vielen Berechnungen treten Fehler auf, da mit irrationalen Zahlen oft gar nicht exakt gerechnet werden kann. Werte wie PI, 2 , sin(1), e, ln(2), usw. können nur symbolisch dargestellt werden. Sie müssen bei numerischen Berechnungen durch Näherungswerte (Dezimalzahlen) angenähert werden. In diesem Kapitel betrachten wir einen Umgang mit Fehlern.

Die ***exakten*** (meist unbekannten) ***Werte*** bezeichnen wir mit

$x_0, y_0, \ldots ,$

Die ***Näherungswerte*** bezeichnen wir mit x, resp. y:

$x = x_0 \pm \Delta x, \ \ y = y_0 \pm \Delta y, \ldots$

Die exakten ***Fehler*** sind unbekannt. Wir gehen von Abschätzungen folgender Form aus:

$|x - x_0| \le \Delta x, \ \ |y - y_0| \le \Delta y, \ldots \qquad (\Delta x, \Delta y, \ldots$ sind positiv)

Bei dieser Abschätzung nennt man Δx und Δy absolute ***maximale Fehler***.

> Die Angabe des Fehlers Δx (z.B. 0.15 km) einer Grösse ***x*** (z.B. 3.0 km) heisst ***absoluter*** und die Angabe in ***Prozenten*** $\Delta x_{relativ} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ (z.B. 0.05 = 5%) heisst ***relativer Fehler***.

4.1 Gesetz der Fehlerfortpflanzung

Sind x mit einem maximalen Fehler Δx und y mit einem maximalen Fehler Δy behaftet, so pflanzen sich die beiden Fehler von x und y bei der Berechnung von $z = f(x; y)$ zu einem ***maximalen Fehler*** von

$$\Delta z_{abs} = | f_{,x}(x; y) | \, \Delta x + | f_{,y}(x; y) | \, \Delta y$$

fort.

Aufpassen!
Der maximale und mittlere Fehler meint nicht das gleiche.
→ Aufgabenstellung gut lesen

4.1.1 Fehlerfortpflanzung bei Funktionen mit nur einer Variablen

Soll der Funktionswert $y = f(x)$ bestimmt werden und ist die Eingangsgrösse x mit einem maximalen Fehler von Δx versehen, so lässt sich die Ungenauigkeit von y durch

$$\Delta y = |f_{,x}(x_0)| \cdot \Delta x$$

abschätzen.

4.1.2 Fehlerfortpflanzung bei Funktionen mit mehreren Variablen

Ist der Funktionswert $u = f(x; y; z)$ an der Stelle x_0, y_0 und z_0 zu bestimmen und sind die Eingangsgrössen x, y und z mit maximalen Fehlern Δx, Δy, Δz versehen, so lässt sich die Ungenauigkeit von u durch

$$\Delta u = |f_{,x}(x_0; y_0; z_0)| \cdot \Delta x + |f_{,y}(x_0; y_0; z_0)| \cdot \Delta y + |f_{,z}(x_0; y_0; z_0)| \cdot \Delta z$$

abschätzen.

4.2 Statistik einer Messreihe

Ziel: Bestimmung des Mittelwertes $\bar{x}$ und der Standardabweichung Δx des Mittelwertes

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

Definitionen:

Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Mittlerer Fehler der Einzelmessung (Standardabweichung der Messreihe)

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \right]} \quad \text{oder}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Mittlere Fehler des Mittelwertes (Standardabweichung des Mittelwertes) ist

$$\mathbf{\Delta x = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

4.2.1 Fehlerfortpflanzung bei mittleren (statistischen) Fehlern

Ist der Funktionswert $u = f(x; y; z)$ an der Stelle $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ zu bestimmen und sind die Eingangsgrössen x, y und z mit ***mittleren*** Fehlern Δx, Δy, Δz versehen, so lässt sich der *mittlere Fehler des Mittelwertes von u* durch

$$\Delta u = \sqrt{[f_{,x}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})\,\Delta x]^2 + [f_{,y}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})\,\Delta y]^2 + + [f_{,z}(\bar{x}; \bar{y}; \bar{z})\,\Delta z]^2}$$

abschätzen.

5 Parameterdarstellung

Bewegungen werden mit Parameterdarstellungen beschrieben, die Lage ist eine Funktion der Zeit t.

Die Beschreibung einer Bewegung (oder einer Kurve) im Raum in der Form

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad \text{mit } t \in \mathbb{D}$$

nennt man *Parameterdarstellung der Bewegung* (der *Kurve, des Graphen, der Bahn*).
Durch den Parameter t erhält die Kurve eine Orientierung (eine Richtung).

Die drei Funktionen x(t), y(t), z(t) können als Koordinaten eines „fahrenden" Punktes

$$P(t) = P(x(t); y(t); z(t))$$

oder als Komponenten eines Ortsvektors

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$ aufgefasst werden.

Bewegung auf einer Kreisbahn

Die Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius r um den Ursprung lautet:

$$x(t) = r\cos(t)\,,\ \ y(t) = r\sin(t) \ \text{ und } \ t \in [0; 2\pi]$$

Bewegung auf einer Geraden

Kann über Ortsvektor berechnet werden

$$\overrightarrow{r(t)} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AB} \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

5.1 Parameterdarstellung für eine Funktion y=f(x)

Der Graph einer Funktion $f: x \to y = f(x)$ mit $x \in \mathbb{D}$ kann mit einer Parameterdarstellung in der Form

$$x(t) = t \ \text{ und } \ y(t) = f(t) \ \text{ mit } t \in \mathbb{D}$$

dargestellt werden.

Grafische Darstellung mit dem TI-Taschenrechner:

Stellen Sie den Taschenrechner auf Parameterdarstellungen ein:

[MODE] → Graph → Function → Parametric wählen

Wählen Sie [Y =] für die Eingabe der Funktionen x(t) = … (xt1 =) und y(t) = … (yt1 =)

Wählen Sie [**Graph**]

Mit [**Window**] können Sie die Bereiche wählen: $t \in [t_{min}; t_{max}]$, $x \in [x_{min}; x_{max}]$, $y \in [y_{min}; y_{max}]$

5.2 Geschwindigkeits- und Tangentenvektor

Satz: Ist $\vec{r}(t)$ differenzierbar, so heisst

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \textit{Geschwindigkeitsvektor} \text{ an der Stelle } P(t) = P(\vec{r}(t)).$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist immer auch ein ***Tangentialvektor*** $\vec{t}$ an die Kurve an der Stelle P(t).

Die Geschwindigkeit (velocity) ist ein Vektor $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. In der Umgangssprache ist die Geschwindigkeit (speed) eine skalare Grösse $v(t) = |\dot{\vec{r}}(t)|$.

Die Beschleunigung beschreibt die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit:

Die Beschleunigung der Bewegung $t \to \vec{r}(t)$ beträgt $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$

Physik: Die Geschwindigkeit ist immer tangential zur Bahn. Ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant, so ist die Beschleunigung senkrecht zur Bewegung (zur Geschwindigkeit). Bei einer Kreisbewegung ist die Beschleunigung nur dann immer zum Zentrum gerichtet, wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist.

5.3 Bogenlänge

Die Länge der Kurve $\vec{r}(t)$ vom Punkt $P(t_1)$ zum Punkt $Q(t_2)$ beträgt

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt$$

6 Gradient und verwandte Gebiete

6.1 Die Kettenregel: Differentiation nach einem Parameter

Die Kettenregel für Funktionen mit zwei Variablen.

Es sei $z(t) = f(\,x(t);\, y(t))$ eine verkettete Funktion der äusseren Funktion $z = f(x;\, y)$ mit den inneren Funktionen $x(t)$ und $y(t)$.

Für die Ableitung $\dot{z}(t) = \frac{z(t)}{dt}$ der zusammengesetzten Funktion gilt

$$\frac{dz(t)}{dt} = f_{,x}(\,x(t)\,;\,y(t))\cdot\frac{dx}{dt} + f_{,y}(\,x(t)\,;\,y(t))\cdot\frac{dy}{dt}$$

Erweiterung der Kettenregel auf Funktionen mit n Variablen:
Die Ableitung $\dot{u}(t)$ der zusammengesetzten Funktion $u = u(x;\, y;\, z)$ mit den parameterab-hängigen Variablen $x = x(t)$, $y = y(t)$ und $z = z(t)$ beträgt

$$\dot{u}(t) = u_{,x}(x;\,y;\,z)\cdot\frac{dx}{dt} + u_{,y}(x;\,y;\,z)\cdot\frac{dy}{dt} + u_{,z}(x;\,y;\,z)\cdot\frac{dz}{dt}$$

6.2 Die Definition des Gradienten

Der Gradient von $z = f(x, y)$ ist ein Vektor, er ist definiert durch

$$\operatorname{grad}(f) = \vec{\nabla}(x;\,y) = \begin{pmatrix} f_{,x}\,(x;\,y) \\ f_{,y}\,(x;\,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,\,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,\,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Weitere Symbole für den Gradienten sind $\vec{\nabla} f$ oder ∇f oder $\nabla f\,(x,\,y)$ (∇ heisst Nablasymbol).

6.3 Die Richtungsableitung (Steigung in eine beliebige Richtung)

Die Steigung der Fläche $z = f(x, y)$ relativ zur xy-Ebene in Richtung $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$ beträgt im allgemeinen Punkt

$$\mathbf{f_{,\vec{e}}\,(\vec{r}) = \frac{\partial\, f(\vec{r})}{\partial\, \vec{e}} = \tan(\varphi) = grad(\,f(x,y)\,)\cdot \vec{e}}$$

Man nennt $\mathbf{f_{,\vec{e}}\,(\vec{r})}$ **die *Richtungsableitung*** von f in Richtung $\vec{e}$,

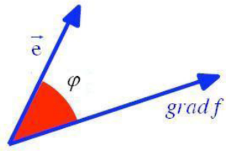
φ ist der Steigungswinkel relativ zur xy-Ebene.

6.4 Eigenschaften des Gradient

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Eigenschaften des Gradienten zusammengestellt.

Die Basis bildet die Formel für die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \text{grad } f \cdot \vec{e}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$



Wir erinnern an das Skalarptodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi),$$

wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

Somit gilt für die Richtungsableitung in Richtung $\vec{a}$

$$f_{,\vec{a}}(\vec{r}) = \text{grad } f \cdot \vec{e}_{\vec{a}} = |\text{grad } f|\,|\vec{e}_{\vec{a}}| \cos(\varphi) = |\text{grad } f| \cos(\varphi) \qquad (⁂)$$

Es folgen daraus die wichtigen Aussagen:

- **Der Gradient zeigt in Richtung der grössten Zunahme der Funktionswerte.**
  D.h. Vergleicht man in einem festen Punkt die Ableitungen in alle mögliche Richtungen, so erhält man den maximalen Wert, wenn man in Richtung des Gradienten ableitet.

  Beweis: Aus (⁂) folgt, dass $f_{,\vec{a}}(\vec{r})$ maximal ist, für $\varphi = 0$, da dann $\cos(\varphi) = 1$.

- **Der Maximalwert der Richtungsableitungen beträgt |grad f|** (Betrag des Gradienten)

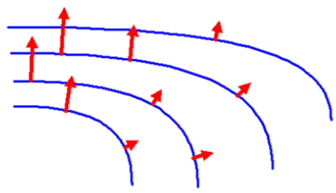
  Beweis: Aus (⁂) folgt für $\varphi = 0$, dass $f_{,\vec{a}}(\vec{r}) = |\text{grad } f|$ gilt, da $\cos(0°) = 1$

- **Die Gradienten stehen senkrecht zu den Höhenlinien.**

  Beweis:

  Einerseits gilt trivialerweise:

  Die Richtungsableitung in Richtung der Höhenlinie ist Null.

  Anderseits folgt aus (⁂),

  Die Richtungsableitung ist Null, wenn

  $f_{,\vec{a}}(\vec{r}) = \text{grad } f \cdot \vec{e}_{\vec{a}} = 0$ gilt,

  Ein Skalarptodukt ist Null, genau dann, wenn die Vektoren normal zueinander stehen. Da $\vec{e}_{\vec{a}}$ in Richtung der Höhenlinie zeigen muss (erster Punkt oben), liegt graf f normal zur Höhenlinie.

Veranschaulichungen:

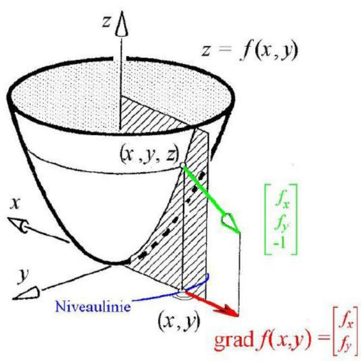
Fläche $z = f(x; y)$

Gradient $\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{pmatrix}$

Niveaulinie $z = f(x; y) = c$

Normale zur Tangentialebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_{,x}(x_o; y_o) \\ f_{,y}(x_o; y_o) \\ -1 \end{pmatrix}$$



6.5 Die implizite Ableitung

Durch Ausdrücke der Form F(x; y) = 0 können Funktionen

$f: x \rightarrow y = f(x)$

implizite definiert werden.

Die Lösungspaare (x, y) der Gleichung F(x; y) = 0 definieren die Abbildung $f: x \rightarrow y$.

Wir suchen die Ableitung dieser implizit definierten Funktion y = f(x).

6.5.1 Variante I (MATH)

Variante I:

Beispiel: Durch $x^2 + y^2 = 25$ wird implizite eine Funktion y = f(x) definiert.

Bestimmen Sie die Ableitung f '(x) allgemein und an der Stelle x = 3, y = 4.

Charakteristisch beim impliziten Ableiten ist, dass man den x- und y-Wert kennen muss. Bei implizite definierten Funktionen gehören oft zu einem Wert x mehrere y-Werte. In unserem Fall gilt $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$

Die implizite Ableitung berechnen wir nach folgender Methode

Für die „unbekannte" Funktion f(x) gilt

$x^2 + f(x)^2 = 4$ oder $x^2 + y^2 = 4$

Wir leiten nach der Kettenregel auf beiden Seiten der Gleichung nach x ab

$2x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0$ oder $2x + 2y\,y' = 0$

Aufgelöst nach f '(x) respektive nach y '

$x + f(x)\,f'(x) = 0$ oder $x + y\,y' = 0$

und

$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$ oder $y' = -\frac{x}{y}$

Die implizite Ableitung lautet

allgemein $\mathbf{y' = -\frac{x}{y}}$ und im Punkt x = 3, y = 4: $\mathbf{y' = -\frac{3}{4}}$

Skizzieren Sie die Situation: Kreis mit Radius r = 5, Tangente in (3; 4)

6.5.2 Variante II (MA+PHY2)

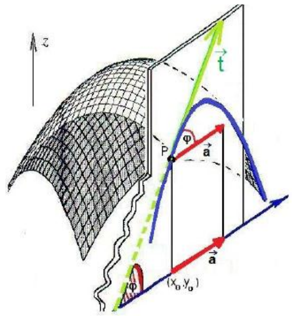
Durch F(x; y) = 0 sei eine Funktion y = f(x) implizite definiert. Für diese Funktion f lautet die Ableitung

$$y' = f'(x_o) = -\frac{F_{,x}(x_o;\, y_o)}{F_{,y}(x_o;\, y_o)}\,.$$

6.6 Das Wichtigste zum Gradienten

Die Ableitung einer Funktion z = f(x; y) in Richtung $\vec{a}$ entspricht der Steigung des Graphen in Richtung $\vec{a}$.
Siehe in der Skizze den Pfeil $\vec{t}$.
Zwischen der Steigung m und dem Steigungswinkel φ gilt die Beziehung

$\tan(\varphi) = m$



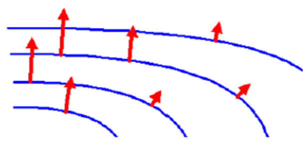
Die Ableitung von z = f(x; y) in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird berechnet nach der Formel

$$f_{,\vec{a}}(\vec{r}) = \frac{\partial f(\vec{r})}{\partial \vec{a}} = \mathrm{grad}(f(x,y)) \cdot \vec{e}_{\vec{a}},$$

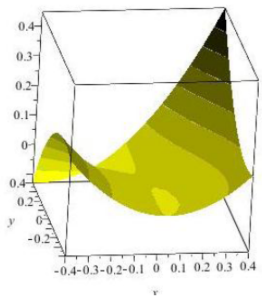
wobei $\vec{e}_{\vec{a}} = \dfrac{\vec{a}}{a} = \dfrac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$ ist.

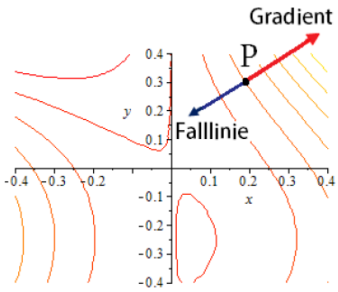
Merke:

- **Gradienten stehen orthogonal zu den Höhenlinien.**
- **In einem festen Punkt ist die Ableitung in Richtung des Gradienten am grössten.**
- **Der Gradient zeigt entgegen der Falllinie.**



Beispiel: Die Bilder zeigen 2d- und 3d- Niveaulinien der Funktion f(x; y) = $xy + x^2 + 2xy^2$.





Im Punkt P(0.2;0.4) steigt der Graph am stärksten in Richtung grad f(0.2; 0.4) = $\begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.44 \end{pmatrix}$. Eine Kugel rollt von P aus in Richtung der Fallinie, das heisst entgegengesetzt zum Gradienten $\vec{b} = \begin{pmatrix} -0.88 \\ -0.44 \end{pmatrix}$

7 Extremstellen

7.1 Extremstellen einer Funktion mit zwei Variablen

Die Funktion $z = f(x; y)$ besitzt an der Stelle $P(x_o; y_o)$ einen *relativen Extremwert*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $P(x_o; y_o)$ ist ein stationärer Punkt, d.h. es gilt:

$$f_{,x}(x_o; y_o) = 0 \quad \text{und} \quad f_{,y}(x_o; y_o) = 0$$

2. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung genügen im Punkt $P(x_o; y_o)$ der Ungleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{,xx}(x_o; y_o) & f_{,xy}(x_o; y_o) \\ f_{,yx}(x_o; y_o) & f_{,yy}(x_o; y_o) \end{vmatrix} = f_{,xx}(x_o; y_o) \cdot f_{,yy}(x_o; y_o) - f_{,xy}(x_o; y_o)^2 > 0$$

Ist zusätzlich

- $f_{,xx}(x_o; y_o) < 0$, so liegt ein relatives ***Maximum*** vor
- $f_{,xx}(x_o; y_o) > 0$, so liegt ein relatives ***Minimum*** vor.

Hinweis:
Sind $f_{,x}(x_o; y_o) = 0$ und $f_{,y}(x_o; y_o) = 0$ und gilt $f_{,xx}(x_o; y_o) \cdot f_{,yy}(x_o; y_o) - f_{,xy}(x_o; y_o)^2 < 0$, so ist bei $P(x_o; y_o)$ ein ***Sattelpunkt***.

Hinweise:
- Δ ist die Determinante der sogenannten Hesseschen Matrix.
- Im Fall $\Delta = 0$ liefert der Satz keine Entscheidung. Es kann ein Sattel- oder ein Extrempunkt vorliegen.

7.2 Extremstellen mit Nebenbedingungen

Allgemeine Problemstellung: Bei einer Optimierungsaufgabe mit einer Nebenbedingung wird ein Extremwert einer Funktion $z = f(x; y)$ gesucht unter der Voraussetzung, dass die Variablen x und y eine Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$ erfüllen müssen.

Lagrange hat eine verallgemeinerungsfähige Vorgehensweise für diese Problemstellung gefunden. Er fand:

Extremstellen (x_o / y_o) der Funktion $z = f(x; y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x; y) = 0$ sind Lösungen des Gleichungssystems

$L_{,x} = 0; \quad L_{,y} = 0; \quad L_{,\lambda} = 0$

mit der der sogenannten Lagrangehilfsfunktion

$L(x; y; \lambda) := f(x; y) + \lambda\, \varphi(x; y)$

Lagrange definierte aus rein ästhetischen Gründen eine Funktion $L(x; y; \lambda) := f(x; y) + \lambda\, \varphi(x; y)$. Die partiellen Ableitungen von L führen auf genau die gewünschten Gleichungen:

$$\begin{aligned} L_{,x}(x; y; \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f_{,x}(x; y) + \lambda\, \varphi_{,x}(x; y) = 0 \quad \text{und} \\ L_{,y}(x; y; \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad f_{,y}x; y) + \lambda\, \varphi_{,y}(x; y) = 0 \quad \text{und} \\ L_{,\lambda}(x; y; \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \varphi(x; y) = 0 \end{aligned}$$

Hilfssatz: Werden Extremstellen von $g(x, y) = \sqrt{f(x; y)}$ gesucht, so können ebensogut Extremstellen von $f(x; y)$ gesucht werden. .

Begründung: Das Maximum (Minimum) von $g(x; y) = \sqrt{f(x; y)}$ wird an der gleichen Stelle wie das Maximum (Minimum) von $f(x; y)$ angenommen.

Merke: Liegt ein Punkt P(x; y) auf einer Kurve mit der Gleichung F(x; y) = 0 liegen, so erfüllen die Koordinaten (x; y) die Nebenbedingung F(x, y) = 0.

Das Vorgehen von Lagrange lässt sich auf Extremalaufgaben mit *mehr als zwei Variablen* und mit *mehreren Nebenbedingungen* beliebig verallgemeinern. Es gilt der Satz (am Beispiel mit drei Variablen und zwei Nebenbedingungen) formuliert.

Es sei $(x_o; y_o; z_o)$ eine Extremstelle von $u = f(x, y, z)$ unter den Nebenbedingungen $\varphi_1(x, y, z) = 0$ und $\varphi_2(x, y, z) = 0$.

Dann ist (x_o, y_o, z_o) eine Lösung des Gleichungssystems

$L_{,x} = 0$; $L_{,y} = 0$; $L_{,z} = 0$; $L_{,\lambda} = 0$ und $L_{,\mu} = 0$;

mit der Hilfsfunktion $L(x, y, \lambda, \mu) := f(x, y, z) + \lambda\, \varphi_1(x, y, z) + \mu\, \varphi_2(x, y, z)$

8 Vektoranalysis

In der Vektoranalysis werden die Methoden der Analysis (Differential- und Integralrechnung) auf die Vektorrechnung angewandt. Viele Fragestellungen in der Vektoranalysis kommen aus der Physik und den Ingenieurwissenschaften

8.1 Skalarfelder

Funktionen $f\colon R^2 \to R$ wie $z = f(x; y)$ nennt man auch *Skalarfelder*. Jedem Punkt in einem Gebiet wird ein Skalar (eine Zahl) zugeordnet.

Neben der üblichen Schreibweise für Funktionen mit mehreren Variablen wie

$f\colon R^2 \to R$ wie $z = f(x; y)$

schreiben wir in Zukunft manchmal

$z = f(\vec{r})$ oder $z = f(P)$

Dabei ist mit $\vec{r}$ ist der Ortvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und mit $P = (x; y)$ dir Stelle des Punktes.

Grafische Darstellungen von Funktionen in der Ebene und im Raum.

8.2 Vektorfelder

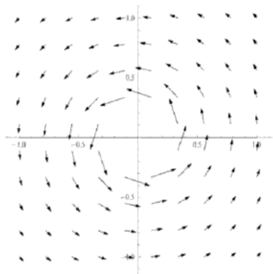
Eine Funktion, die jedem Punkt P einen Vektor zuordnet, nennt man *Vektorfeld*. Beispiel:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(P) = \vec{v}(x; y; z) = \begin{pmatrix} v_1(x; y; z) \\ v_2(x; y; z) \\ v_3(x; y; z) \end{pmatrix}$$

1. Beispiel: Das Magnetfeld um einen (unendlich langen) stromdurchflossenen Draht längs der z-Achse kann (ausserhalb der Drahtes) durch

$$\vec{B}(x; y; z) = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert werden. (i ist die Stromstärke)

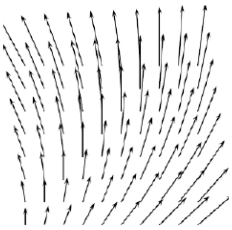


Gradientenfelder

Gegeben sei eine Funktion $u = \varphi(x;\, y;\, z)$.

Das Gradientenfeld ist definiert durch

$$\vec{F}(x;\, y;\, z) := \operatorname{grad} \varphi(x;\, y;\, z) = \begin{pmatrix} \varphi_{,x}(x;\, y;\, z) \\ \varphi_{,y}(x;\, y;\, z) \\ \varphi_{,z}(x;\, y;\, z) \end{pmatrix}$$



Die Begriffe „potentielle Energie" oder „elektrische Spannung" sind eng mit dem Begriff des *Gradientenfeldes* verbunden.

8.3 Wegintegral

Unter dem *Kurvenintegral (Wegintegral)* von $\vec{F}(\vec{r})$ längs des *Integrationsweges* C: $\vec{r}(t)$ mit $t \in [t_o;\, t_1]$ versteht man das Integral

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_o}^{t_1} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})\, dt$$

Beim Übergang $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_o}^{t_1} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}})\, dt$ wurde die Beziehung $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \dot{\vec{r}} \cdot dt$ verwendet. Gleichzeitig muss in $\vec{F}(x, y, z)$ die Parameterdarstellung $\vec{F}(x(t), y(t), z(t))$ eingesetz werden. $\dot{\vec{r}}$ drückt den Vektor $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$ aus.

8.4 Gradientenfeld

Wegintegrale $W = \int_\Gamma \vec{F}(x, y, z) \cdot dr$ sind *genau dann* (und nur dann) unabhängig vom Weg, *wenn* eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ so existiert, sodass $\vec{F}(x, y, z) = \operatorname{grad} \varphi(x, y, z)$ gilt.
Potentiale sind bis auf eine Konstante eindeutig.

Man nennt in diesem Fall die Funktion $\varphi(x, y, z)$ ***Potential*** von $\vec{F}$ und umgekehrt das Vektorfeld $\vec{F}$ *konservatives Feld* (energieerhaltend), *Gradient-* und *Potentialfeld*.

Potentiale treten in der Mechanik, in der Elektrodynamik und auch in der Thermodynamik auf. Man nennt in der Thermodynamik Potentiale auch Zustandsfunktionen.

Für konservative Vektorfelder können Wegintegral einfacher berechnet werden. Es gilt:

Ist $\varphi(x;\, y;\, z)$ ein Potential eines Vektorfeldes $\vec{F}(x;\, y;\, z)$, so gilt für das Wegintegral von A nach B unabhängig vom eingeschlagenen Weg Γ

$$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

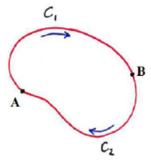
Notation:
Mit $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ und $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$ bedeutet $\varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(x_2;\, y_2;\, z_2) - \varphi(x_1;\, y_1;\, z_1)$

8.4.1 Wegintegrale über geschlossene Wege

Wegintegrale $W = \oint \vec{F} \cdot dr$ über alle geschlossenen Wege

sind genau dann Null, wenn das Vektorfeld $\vec{F}$ konservativ ist.

Für geschlossene Wege wird das Symbol $\oint \ldots$ verwendet.



8.5 Integrabilitätskriterium (für konservative Felder)

Satz: Das Vektorfeld $\vec{F}(x;\,y;\,z) = \begin{pmatrix} F_x(x;\,y;\,z) \\ F_y(x;\,y;\,z) \\ F_z(x;\,y;\,z) \end{pmatrix}$ ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet genau dann *konservativ*, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Diese lauten

$F_{x,y}(x;\,y;\,z) = F_{y,x}(x;\,y;\,z)$ und $F_{x,z}(x;\,y;\,z) = F_{z,x}(x;\,y;\,z)$ und $F_{y,z}(x;\,y;\,z) = F_{z,y}(x;\,y;\,z)$

Satz: Das Vektorfeld $\vec{F}(x;\,y) = \begin{pmatrix} F_x(x;\,y) \\ F_y(x;\,y) \end{pmatrix}$ ist in einem einfach zusammenhängenden Gebiet genau dann *konservativ*, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Diese lautet

$F_{x,y}(x;\,y) = F_{y,x}(x;\,y)$

8.6 Divergenz

Mit dem Begriff *Divergenz* kann man Quellen und Senken beschreiben. Unter der Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} v_x(x;\,y;\,z) \\ v_y(x;\,y;\,z) \\ v_z(x;\,y;\,z) \end{pmatrix}$$

versteht man das Skalarfeld

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Die Bezeichnung »Divergenz« stammt aus der Hydrodynamik und bedeutet dort »Auseinanderströmen einer Flüssigkeit« (divergieren). Die skalare Grösse $\operatorname{div} \vec{v}$ wird als »Quelldichte« oder »Quellstärke pro Volumenelement« bezeichnet.

In Analogie zum Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit gilt

$\operatorname{div} \vec{v} > 0$ Im Volumenelement befindet sich eine »Quelle«.
Bei der Quelle entspringen Feldlinien.

$\operatorname{div} \vec{v} < 0$ Im Volumenelement befindet sich eine »Senke«.
Bei der Senke werden Feldlinien verschluckt.

$\operatorname{div} \vec{v} = 0$ Das Volumenelement ist »quellenfrei«

8.7 Satz von Gauss

Gaussche Integralsatz der Vektoranalysis

Der totale Fluss eines Vektorfeldes $\vec{v}$ durch die geschlossene Oberfläche eines Volumens ist gleich gross wir das Volumenintegral der Divergenz:

$$\int_{\text{Oberfläche}} \vec{v}\,\vec{n}\,dA = \int_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{v}\,dV$$

Dabei weist $\vec{n}$ nach aussen, senkrecht zur Oberfläche.

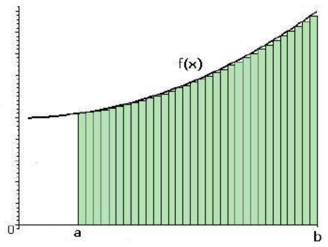
9 Mehrfachintegrale

9.1 einfaches Integral

Das bestimmte Integral von a nach b ist definiert durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x\right)$$

mit $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ und $x_k = a + k\,\Delta x$



9.2 Doppelintegrale

Die Berechnung des Doppelintegrals

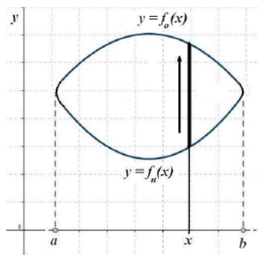
$$I = \iint_A f(x;y)\,dA$$

über dem skizzierten Bereich

$$A = \{ (x;y) \mid a \le x \le b,\ f_u(x) \le y \le f_o(x) \}$$

erfolgt durch folgende zwei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen:

$$I = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$



Bezeichnungen: x, y Integrationsvariablen
f(x, y) Integrand
dA Flächenelement der Fläche A

Die Integration über dy heisst innere, jene über x ist die äussere Integration.

Für y-Normalbereiche gilt

Die Berechnung des Flächenintegrals

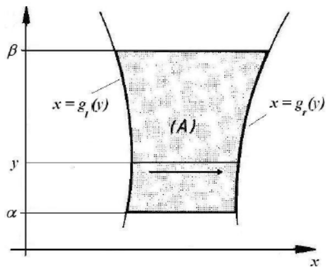
$$I = \iint_A f(x;y)\,dA$$

über dem y-Normalbereich

$$A = \{ (x;y) \mid \alpha \le y \le \beta,\ g_l(y) \le x \le g_r(x) \}$$

erfolgt durch zwei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen:

$$I = \int_{y=\alpha}^{\beta}\left(\int_{x=g_l(y)}^{g_r(y)} f(x,y)\,dx\right)dy$$



9.2.1 Regeln für Flächenintegrale

Um die Lesbarkeit zu erhöhen schreibe man oft statt $\int_A f(x;\,y)\,dA$ nur kurz $\int_A f\,dA$

Flächenintegrale $\int_A f\,dA$ stellen Summen dar. Daraus folgen die Regeln:

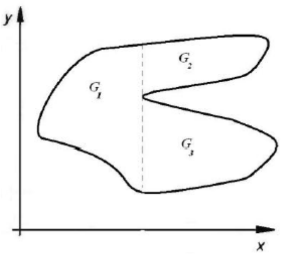
1. Integration einer Summe

$$\int_A [f + g]\,dA = \int_A f\,dA + \int_A g\,dA$$

2. Konstanten c dürfen vor das Integral gezogen werden.

$$\int_A c\,f\,dA = c \cdot \int_A f\,dA$$

3. Integrationsgebiete können zerlegt werden. Das Gebiet G werde in drei elementfremde (disjunkte) Teilgebiete G_1, G_2 und G_3 zerlegt.

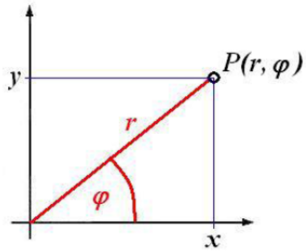


$$\int_G f\,dA = \int_{G_1} f\,dA + \int_{G_2} f\,dA + \int_{G_3} f\,dA$$

9.3 Integrieren mit Polarkoordinaten

9.3.1 Polarkoordinaten

Mit Polarkoordinaten beschreiben wir die Lage eines Punktes durch r und φ gemäss Skizze.



$r \geq 0$ ist der Abstand vom Ursprung (vom Pol) zum Punkt P.

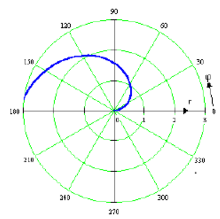
φ ist der Polarwinkel (Richtungswinkel)

Man schreibt oft $P(r;\ \angle\,\varphi)$

9.3.2 Kurven mit Polarkoordinaten

Bei der Definition von Kurven mit Polarkoordinaten, wird der Radius r als Funktion des Polarwinkels φ dargestellt:

$$r = r(\varphi)$$



9.3.3 Integration mit Polarkoordinaten

Die Berechnung des Flächenintegrals

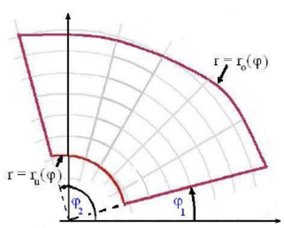
$$I = \iint_A f(x;\,y)\,dA$$

über dem Bereich

$$A = \{\,(r;\,\varphi) \mid \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,\ \ r_u(\varphi) \leq x \leq r_o(\varphi)\,\}$$

erfolgt durch zwei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationen:

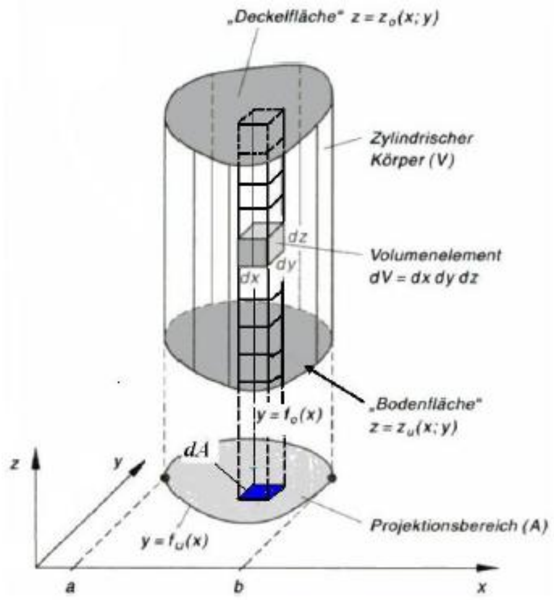
$$I = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{r=r_u(\varphi)}^{r_o(\varphi)} f(r\cdot\cos(\varphi)\,;\,r\cdot\sin(\varphi))\cdot r\,dr \right) d\varphi$$



9.4 Volumenintegral

Die Definition des Volumenintegrals lautet

$$I = \int_V f(x; y; z)\, dV = \lim_{\Delta V \to 0} \sum_j \sum_k \sum_m f(x_j; y_k; z_m) \cdot \Delta V_{jkm}$$



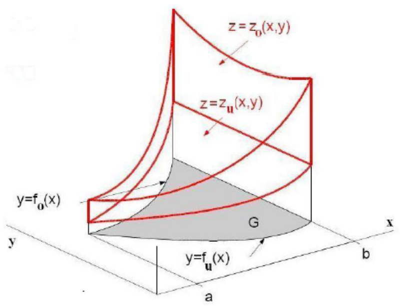
9.4.1 Dreifachintegral mit kartesischen Koordinaten

Die Berechnung des Dreifachintegrals

$$I = \int_V f(x; y; z)\, dV$$

mit kartesischen Koordinaten erfolgt durch drei nacheinander auszuführende einfache Integrationen.

$$I = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \left(\int_{z=z_u(x,y)}^{z_o(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy\, dx$$



Man integriert über die Projektion A = {(x, y) | $a \le x \le b$, $f_u(x) \le y \le f_o(x)$ } gefolgt von einer Integration über z von der Boden- zur Deckfläche: $z_u(x, y) \le z \le z_o(x, y)$

Strategie: Bestimmen Sie im ersten Schritt bei einem Volumenintegral die Projektion A des Volumens auf die xy-Ebene. Integrieren Sie über dieses Flächenintegral.

Beachten Sie: Mit dem Integranden f(x; y; z) = 1 erhalten Sie den Volumeninhalt $V = \int_V dV$

9.4.2 Dreifachintegral mit Zylinderkoordinaten

Die Berechnung des Dreifachintegrals

$$I = \int_V f(x; y; z)\, dV$$

über der Fläche A = $\{(r, \varphi) \mid \varphi_1 \le x \le \varphi_2,\ \ r_u(\varphi) \le r \le f_o(\varphi)\}$ mit der

Bodenfläche $z = z_u(r, \varphi)$ und der Deckfläche $z = z_o(r, \varphi)$

erfolgt durch drei nacheinander auszuführende einfache Integrationen.

$$I = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_u(\varphi)}^{r_o(\varphi)} \left(\int_{z=z_u(r,\varphi)}^{z_o(r,\varphi)} f(r\cos(\varphi); r\sin(\varphi); z)\, dz \right) r\, dr\, d\varphi$$

Sind die Boden- und Deckflächen $z'_u(x, y)$ oder $z'_o(x, y)$ mit kartesischen Koordinaten gegeben, so folgt $z_u(r, \varphi) = z'_u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ und $z_o(r, \varphi) = z'_o(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

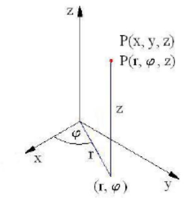
9.4.3 Zylinderkoordinaten

Man kann die Lage eines Punktes mit den Koordinaten

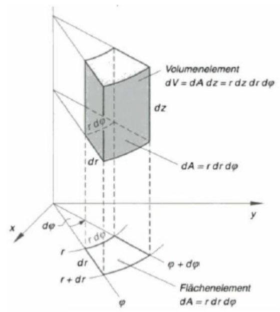
r, φ, z mit $0 \le r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $z \in IR$

beschreiben. r, φ entsprechen den Polarkoordniaten.

$P(r, \varphi, z)$ sind die Zylinderkoordinaten von P.



Das Flächenelement dA mit einer Höhe dz führt zu einem Volumenelement.



Die Umrechnungsformeln von Zylinderkoordinaten in kartesische Koordinaten lauten

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z$$

9.4.4 Boden & Deckflächen mit Zylinderkoordinaten

Ist eine Fläche mit kartesischen Koordinaten in der Form $z = f(x; y)$ gegeben, so kann man die gleiche Fläche mit Zylinderkoordinaten in der Form $z = f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$ beschreiben.

$$z = f(x; y) \rightarrow z = f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$$

Begründung: Der Punkt $P(r; \angle\varphi)$ hat die kartesischen Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, somit geht $z = f(x; y)$ über in $z = f(r\cos\varphi; r\sin\varphi)$

9.4.5 Rotationssymmetrische Flächen

Zylinderkoordinaten sind bei rotationssymmetrischen Volumen geradezu notwendig. Merken Sie sich den Satz:

Rotiert die Kurve $z = f(x)$ mit $x \ge 0$ um die z-Achse, so wird die Fläche

$z = z(r, \varphi) = f(r)$

erzeugt (definiert).